Inspectoratul Şcolar al Judeţului Arad

Olimpiada de Matematică
Etapa pe centru- 18.02.2012

Barem de notare
Clasa a XI-a

1.

Conform ipotezei $A^3 = A^4 \Rightarrow A^3 = A^4 = A^5$ *2p*

$(I_n - A + A^2)(I_n + A - A^3) = I_n + A - A^3 - A - A^2 + A^4 + A^2 + A^3 - A^5 = I_5 \Rightarrow$

4p

$I_n - A + A^2\ e\ inv.\ și\ (I_n - A + A^2)^{-1} = I_n + A - A^3$ *1p*

2.

Observăm că $x_n > 0\ ,\ y_n > 0$ *1p*

$x_{n+1} - x_n = \frac{4+x_n}{y_n} > 0 \Rightarrow (x_n)\ strict\ crescător$

1p

$y_{n+1} - y_n = \frac{4+y_n}{x_n} > 0 \Rightarrow (y_n) strict\ crescător$

1p

$x_n < y_n\ \ (inducție)$ *1p*

Presupunem că (y_n) *mărg. sup.* => $(\exists) \lim_{n\to\infty} x_n = l_1 > 0$

$(\exists) \lim_{n\to\infty} y_n = l_2 > 0$ *1p*

=> $l_1 \le l_2$ și $l_1 l_2 = 4 + l_1 + l_1 l_2$ => $l_1 = l_2 = -4$

$l_1 l_2 = 4 + l_2 + l_1 l_2$ *fals* *1p*

Deci $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ *1p*

3.

$$Fie\ B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} =>$$ *2p*

$$A^n = (aI_3 + B)^n = a^n I_3 + a^{n-1} C_n^1 B + a^{n-2} C_n^2 B$$

2p

pt. că $B^k = O_3\,,\ (\forall)\ k \geq 3$ *3p*

4.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} k^x}{n+1}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}} = 0$$ *3p*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} k^x}{n+1}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}} = \infty$$ *3p*

$$(\nexists)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1^x + 2^x + \cdots + n^x}{n+1}\right)^{\frac{1}{x}}$$ *1p*